

О ВЫЯВЛЕНИИ «СКРЫТЫХ АТТРАКТОРОВ» ПРИ АНАЛИЗЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В СИСТЕМАХ РЕЛЕЙНОГО КЛАССА

rubanov@intbel.ru

**Рубанов В.Г., д-р техн. наук, проф.,
Набоков Р.А., аспирант**

*Белгородский государственный технологический
университет им. В. Г. Шухова*

Аннотация. Представлен DC/DC преобразователь напряжения на основе релейной системы с гистерезисом. Для проведения вычислительного эксперимента построена математическая модель объекта исследования. Получены и представлены бифуркационные диаграммы в области управляющего параметра (напряжение питания), а так же фазовые портреты демонстрирующие наличие в предложенной системе релейного класса «скрытых аттракторов».

Ключевые слова: DC/DC преобразователь, релейная система, гистерезис, математическая модель, бифуркационная диаграмма, фазовый портрет, «скрытый аттрактор».

В последние годы стал проявляться значительный интерес к изучению явлений, называемых "скрытыми аттракторами" [1–4]. Актуальность данных исследований заключается в том, что наличие в динамических системах "скрытых аттракторов" накладывает дополнительные требования при проектировании и эксплуатации систем и требует совершенствования имеющихся методов исследования и/или разработки более точных методов исследования для выявления такого рода аттракторов.

С целью исследования «скрытых аттракторов» рассмотрим принципиальную схему типичного DC/DC преобразователя с релейным элементом с гистерезисом, показанную на рис. 1. Здесь E_0 представляет собой входное напряжение, S является элементом переключения, и R_L – сопротивление нагрузки. R_0 , L_0 , C_0 и R_1 , L_1 , C_1 – сопротивление, индуктивность и емкость входных и выходных фильтров, соответственно. i_0 и i_1 – токи в обмотках фильтра, U_0 и U_1 напряжения на конденсаторах фильтров. Эти четыре переменные представляют собой переменные состояния предложенной модели. Вместе они

отвечают за непрерывную динамику, которая проявляется между моментами переключения. β – коэффициент передачи обратной связи.

В рассматриваемой системе регулирования выходное напряжение U_1 умноженное на коэффициент β сравнивается с опорным напряжением V_{ref} и получаемая разность $\xi = V_{ref} - \beta U_1$ используется для управления переключающим элементом. Так же на схеме рис. 1 присутствуют следующие элементы: DA – компаратор, U_s – управляющий импульс на переключатель S .

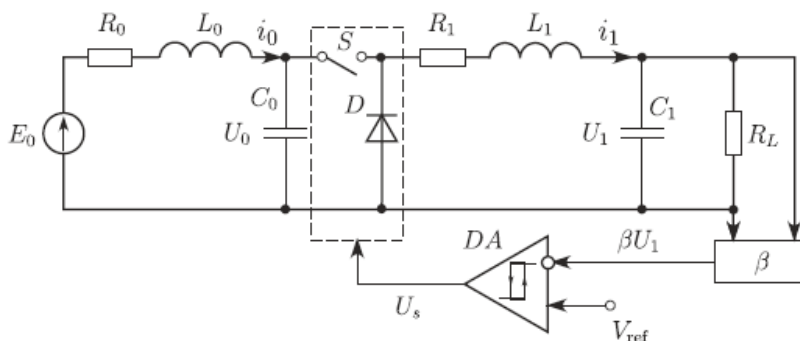


Рисунок 1 – Принципиальная схема DC/DC преобразователя на основе релейной системы с гистерезисом.

Рассматриваемый DC/DC преобразователь напряжения с двухпозиционным реле с гистерезисом (см. рис. 1), был описан в виде следующих дифференциальных уравнений [5–7]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}),$$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}) = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T,$$

где

$$x_1 = R_0 i_0, \quad x_2 = U_0, \quad x_3 = R_0 i_1, \quad x_4 = U_1$$

и

$$f_1 = -\lambda x_1 - \eta x_2 + \eta \Gamma, \quad f_2 = \gamma x_1 - \gamma \frac{1 + K_F(\xi)}{2} x_3,$$

$$f_3 = \mu \frac{1 + K_F(\xi)}{2} x_2 - \nu x_3 - \mu x_4, \quad f_4 = \alpha x_3 - \theta x_4,$$

$$\begin{aligned}
K_F^+ &= K_F^- \text{sign}(\chi_0 + (-1)^{N^-} \xi(X)), \\
K_F^\pm &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_F(t \pm \epsilon), \epsilon > 0 \\
N^+ &= N^- + \frac{1 - \text{sign}(K_F^+ \cdot K_F^-)}{2}, \\
N^\pm &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N^+(t \pm \epsilon), N(0) = 0, \\
\xi(X) &= V_{ref} - \beta x_4, \\
\eta &= \frac{1}{L_0}, \Gamma = E_0, \gamma = \frac{1}{C_0}, \mu = \frac{1}{L_1}, \nu = \frac{R_1}{L_1}, \\
\lambda &= \frac{R_0}{L_0}, \theta = \frac{1}{C_1 R_L}, \alpha = \frac{1}{C_1}.
\end{aligned}$$

Для изучения поведения рассматриваемой динамической системы, зафиксируем все параметры объекта исследования, кроме напряжения питания E_0 , которое будем варьировать (далее входное напряжение представлено безразмерным параметром Γ).

Постоянные параметры системы имеют следующие значения:

$R_0 = 0,47 \text{ Ом}$, $L_0 = 0,709 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $C_0 = 0,478 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$, $R_1 = 2,2 \text{ Ом}$, $L_1 = 3,44 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $C_1 = 0,97 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$, $R_L = 100,0 \text{ Ом}$, $V_{ref} = 2,5 \text{ В}$, $\beta = 0,5$ и $\chi_0 = 0,00625 \text{ В}$, где χ_0 – половина ширины зоны гистерезиса.

В ходе исследований математической модели преобразователя были получены фазовые портреты и построены бифуркационные диаграммы в интервале напряжения питания системы от $5,32 \text{ В}$ до $10,1 \text{ В}$.

На рис. 2 представлены результаты большого числа одномерных сканирований в интервале $5,32 < \Gamma < 5,55$. На бифуркационной диаграмме (см. рис. 2) можно заметить существование семи различных устойчивых периодических областей, разбросанных по рассматриваемому интервалу напряжения, обозначенных, соответственно, как $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{1,3}$, $B_{2,1}$, $B_{4,1}$, $B_{4,2}$ и $B_{7,1}$ (первый индекс указывает периодичность цикла, из которого происходит ветвление, а второй индекс – ветвь с той же периодичностью). Найденные торы обозначаются T_i , где индекс i служит номером тора [5].

На рис. 3, а и рис. 3, б приведены бифуркационные диаграммы в средней и высоковольтных частях интервала напряжения, в котором наблюдается регулярная динамика переключения. Вместе все три бифуркационные диаграммы показывают, что область $B_{1,1}$ существует в

виде стабильного цикла периода-1 для значений входного напряжения между $\Gamma_{\varphi,1} \approx 5.5325$ (рис. 3, а) и $\Gamma_{\varphi,0} \approx 8.085571205$ (рис. 3, б).

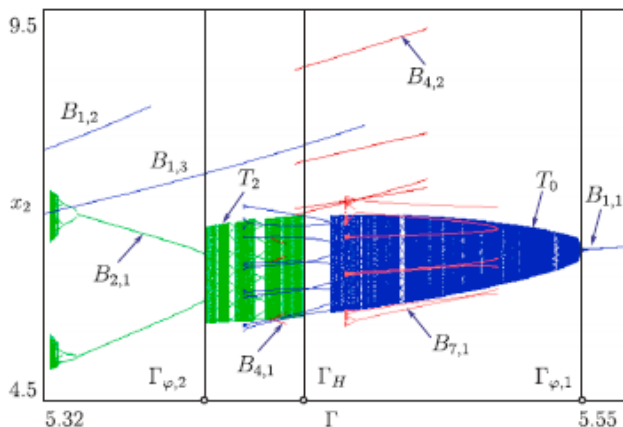


Рисунок 2 – Бифуркационная диаграмма для $5.32 < \Gamma < 5.55$. $\Gamma_{\varphi,1}$ и $\Gamma_{\varphi,2}$ – точки бифуркации рождения тора и Γ_H – точка гомоклической бифуркации для тора T_2 (зеленый цвет)

Эта зона представляет собой нормальную динамику переключений. Когда входное напряжение падает ниже $\Gamma_{\varphi,1}$, цикл переключения претерпевает бифуркацию рождения тора, ведущую к появлению устойчивого тора T_0 (синий цвет) с его эргодической (квазипериодической) и резонансной периодической динамикой. Далее представлена широкая область резонансной динамики периода-9, которая завершает синий тор на стороне низкого напряжения. Слева от синего тора на рис. 2, и частично сосуществующего резонансного тора с периодом-9, второй тор T_2 (зеленый цвет) существует между бифуркацией рождения тора, при $\Gamma_{\varphi,2} \approx 5.38388889$ и гомоклической бифуркацией (разрушение тора), при $\Gamma_H \approx 5.4226$. Этот тор также отображает число ясно видимых резонансных зон [5].

При промежуточных напряжениях (рис. 3, а), регулярный цикл переключения $B_{1,1}$ сосуществует в разных диапазонах параметров: с новой областью динамики периода-1 ($B_{1,4}$), с ветвями периода-5 ($B_{5,1}$) и динамикой периода-14 ($B_{14,1}$). Обе эти последние ветви возникают в бифуркации седло-узел в конце диапазона их существования и высокого напряжения и, после полного или неполного каскада удвоения периода,

они исчезают в гомоклинической бифуркации при пониженном напряжении [5].

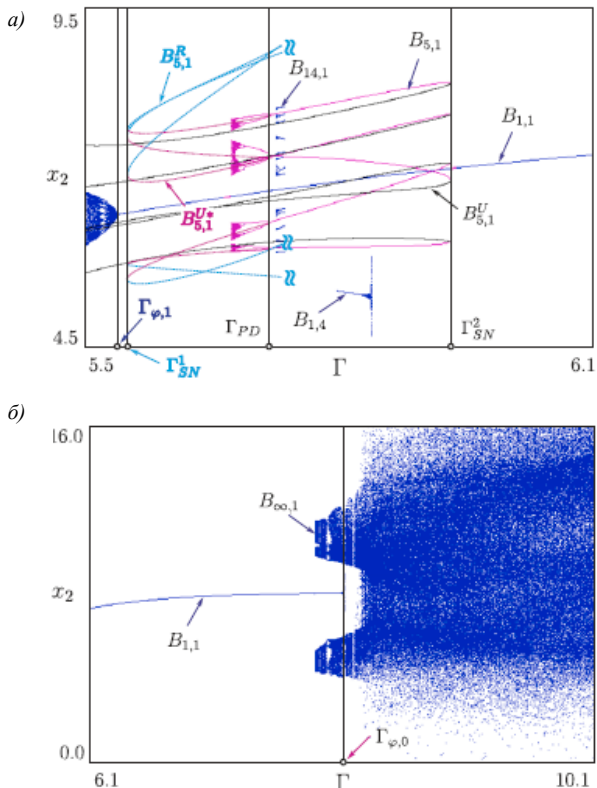


Рисунок 3 – а) Бифуркационная диаграмма для $5.5 < \Gamma < 6.1$.

б) Бифуркационная диаграмма $6.1 < \Gamma < 10.1$. $\Gamma_{\varphi,0} \approx 8,085571205$ – точка докритической бифуркации рождения тора

Стабильная (красный) и неустойчивая (черный) зоны периода-5 $B_{5,1}$ и $B_{5,1}^{U^*}$ рождаются в бифуркации седло-узел при Γ_{SN}^2 . Когда параметр Γ понижается относительно этого значения, стабильный цикл периода-5 претерпевает первую бифуркацию удвоения периода, при Γ_{PD} [5].

Далее, в конце области его существования при высоком напряжении (рис. 3, б), регулярный цикл переключения $B_{1,1}$ подвергается докритической бифуркации рождения тора, что приводит к появлению целого ряда напряжений, где регулярный цикл

переключения устойчив и сосуществует с устойчивой квазипериодической динамикой, связанной с ветвью $B_{\infty,1}$ [5].

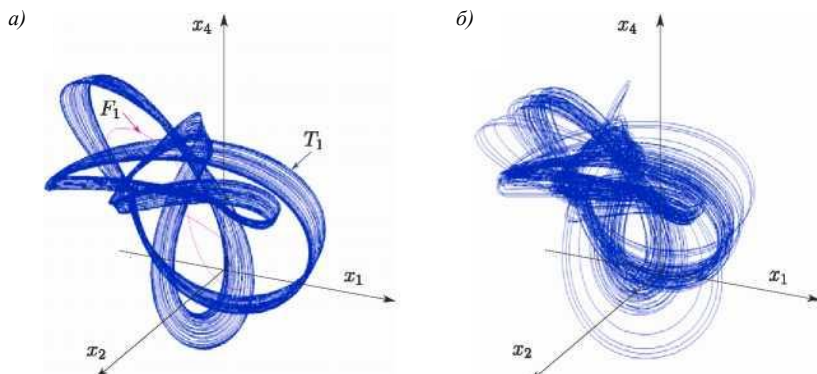


Рисунок 4 – Реконструкция фазового портрета, возникающего в результате докритической бифуркации рождения тора, при $\Gamma_{\varphi,0} \approx 8.085571205$.

а) 3-полосный квазипериодический аттрактор T_1 (связанный с ветвью $B_{\infty,1}$) сосуществующий со стабильным циклом фокус F_1 периода-1 (связанный с ветвью $B_{1,1}$). Бассейн притяжения для T_1 не совпадает с окрестностью F_1 , и тор T_1 может быть назван скрытым квазипериодическим аттрактором. $\Gamma = 7.9$.

б) Цикл фокус F_1 потерял свою стабильность, и бассейн притяжения для стабильного хаотического аттрактора включает F_1 . $\Gamma = 8.174$

В точке бифуркации, цикл переключения становится неустойчивым и сосуществующий хаотический аттрактор, с большой амплитудой, развивает область притяжения, которая перекрывается с нестабильным циклом переключения [5].

На рис. 4, а, б показаны фазовые портреты, возникающие при напряжениях питания $\Gamma = 7.9$ и $\Gamma = 8.174$. 3-полосный квазипериодический тор T_1 может быть назван «скрытым аттрактором», поскольку сосуществует со стабильным циклом фокус F_1 периода-1 (см. рис. 4, а).

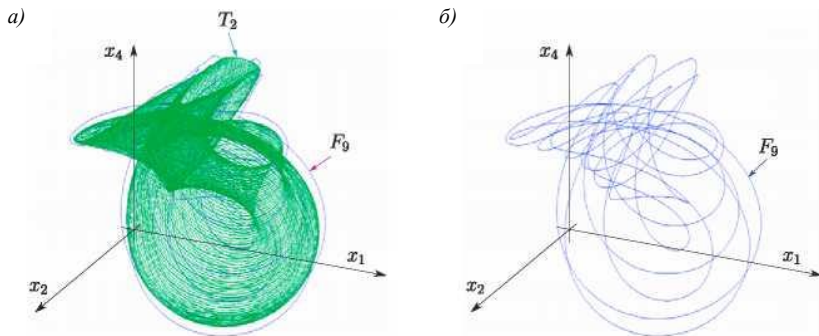


Рисунок 5 – а) Стабильный цикл F_9 периода-9 сосуществует с квазипериодическим аттрактором T_2 , соответствующим с закрытой инвариантной кривой T_2 . $\Gamma = 5.412$. б) Фазовый портрет для стабильного цикла F_9 периода-9

На рис. 5, а, б показан фазовый портрет, при $\Gamma = 5.412$. Устойчивый цикл F_9 периода-9 сосуществует с квазипериодическим аттрактором T_2 (см. рис. 5, а), в этом случае скрытым аттрактором является стабильный цикл F_9 периода-9 (см. рис. 5, б).

Таким образом, в ходе исследования релейной системы с гистерезисом в виде DC/DC преобразователя напряжения, было получено математическое описание рассматриваемого объекта, построены бифуркационные диаграммы и получены фазовые портреты, демонстрирующие наличие «скрытых аттракторов» в системах релейного класса.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Белгородской области в рамках проекта №14-41-08009\15 «р_офи_м», с использованием оборудования ЦВТ БГТУ им. В.Г. Шухова.

Список литературы:

1. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Multistability and Hidden Attractors in a Multilevel DC/DC Converter // Mathematics and Computers in Simulation. 2015. V. 109. P. 32-45.
2. Kapitaniak T., Leonov G., Multistability: Uncovering hidden attractors // The European Physical Journal Special Topics. 2015. V. 224. P. 1405-1408.
3. Jafari S., Sprott J.C., Nazarimehr F. Recent new examples of hidden attractors // The European Physical Journal. Special Topics. 2015. V.224. P. 1469–1476.

4. Feng Y., Pu J., Wei Z., Switched generalized function projective synchronization of two hyperchaotic systems with hidden attractors // The European Physical Journal. Special Topics. 2015. V. 224. P. 1593-1604.
5. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Rubanov V.G., Nabokov R.A. Multistability and hidden attractors in a relay system with hysteresis // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. V. 306. P. 6–15.
6. Nabokov R.A., Rubanov V.G., Kizhuk A.S. The Analysis of the Dynamics of the Voltage Regulator with an Electronic Relay Element with Hysteresis // World Applied Sciences Journal. 2013. T. 24. №12. С. 1686-1690.
7. Набоков Р.А., Рубанов В.Г. Исследование стабилизатора напряжения, обладающего хаотической динамикой // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. научн. конф. Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т, 2012; Харьков: Национ. техн. ун-т «ХПИ». 2012. С. 201-203.