МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА СИНТЕЗА ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПРИМЕНЕНИЕМ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

rubanov@intbel.ru

Рубанов В.Г., д-р техн. наук, проф.,
Кариков Е.Б., инженер
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

Аннотация. В статье описан синтез управляющего устройства дробного порядка. Рассмотрены существующие подходы к синтезу управляющих устройств дробного порядка методом корневого годографа. Предложена модификация известной методики синтеза.

Ключевые слова: дробная динамика, синтез методом корневого годографа, система управления.

Дробная динамика систем управления является обширным и активно развивающимся полем для исследований в настоящее время. Главной особенностью систем дробного порядка является, то что каждое состояние такой системы зависит от всей предыстории ее состояний. С точки зрения математики такой подход характеризуется изменением порядка интегро-дифференциальных преобразований в описании системы. В таком случае уравнение движения объекта управления может представлено как

$$a_n \frac{d^{n\alpha}x}{dt^{n\alpha}} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)\alpha}x}{dt^{(n-1)\alpha}} + \cdots + a_1\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} + x = b_m \frac{d^{m\alpha}u}{dt^{m\alpha}} + b_{m-1}\frac{d^{(m-1)\alpha}u}{dt^{(m-1)\alpha}} + \cdots + b_1 \frac{d^{\alpha}u}{dt^{\alpha}} + b_0 u, \tag{1}$$

где $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m$ – постоянные коэффициенты, X – отклонение регулируемой величины, u – входное воздействие, $\alpha \epsilon R^+$ – соизмеримый порядок дробных операций. Такой подход к математическому описанию применим к любым объектам, описываемым дифференциальными уравнениями в частных производных, что позволяет широко использовать элементы дробной динамики при автоматизации технологических процессов [1,2].

Передаточная функция объекта $W(s) = X(s)/U(s)$, описываемого уравнением (1), может быть представлена в следующем виде [3]:

$$W(s) = \frac{b_m s^{m\alpha} + b_{m-1} s^{(m-1)\alpha} + \dots + b_1 s^{\alpha} + b_0}{a_n s^{n\alpha} + a_{n-1} s^{(n-1)\alpha} + \dots + a_1 s^{\alpha} + 1}.$$

Введем переменную $v = s^{\alpha}$, тогда передаточная функция объекта будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{W}(v) = \frac{b_m v^m + b_{m-1} v^{m-1} + \dots + b_1 v + 1}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \dots + a_1 v + 1}.$$

При проектировании автоматизированных систем удобно пользоваться единой методикой как для анализа показателей качества систем, так и для синтеза законов управления. В качестве такой методики может выступать метод корневого годографа. Построению корневых годографов для систем дробного порядка уделено много внимания в работах зарубежных и отечественных ученых, к тому же особенности таких систем потребовали модификации алгоритма построения годографа [3-6]. Так, при построении годографа в плоскости комплексной переменной s можно наблюдать движение корней, находящихся на неосновных листах поверхности Римана для $v = s^{1/q}$ (рис. 1).

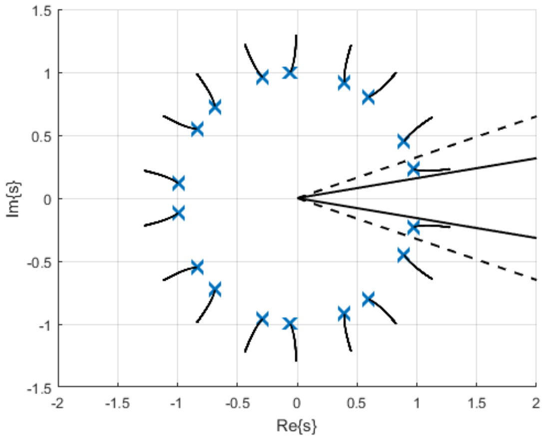

Рисунок 1 – Корневой годограф в плоскости s для объекта с передаточной функцией $W(s) = 1/(s^{1.8} + s^{0.9} + 1)$

На рисунке 1 сплошными линиями ограничен сектор, наличие в котором особых точек говорит о неустойчивости системы. Пунктирные линии ограничивают сектор, соответствующий основному листу поверхности Римана. Так как именно корни на основном листе оказывают существенное влияние на динамику, то для возможности более наглядного анализа их движения следует строить корневой годограф еще и в плоскости комплексной переменной v, в этом случае область устойчивости, аналогично плоскости s будет ограничена сектором, образованным лучами с углами наклона $\pm\alpha\pi/2$ [4]. Методика построения годографа в плоскости v не будет отличаться от таковой для объектов целого порядка (рис. 2).

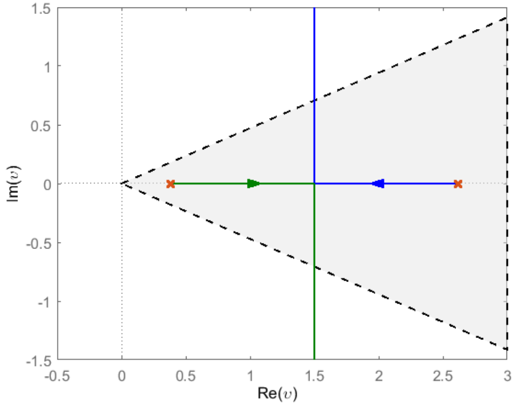

Рисунок 2 – Корневой годограф в плоскости v для объекта с передаточной функцией $W(s) = 1/(s^{0.6} - 3s^{0.3} + 1)$

Одним из преимуществ использования метода корневого годографа является возможность осуществить синтез закона управления САУ. Как и для класса систем целого порядка, для систем дробного порядка используются понятия степени устойчивости η и колебательности μ, свойства уравнений фаз и модулей. САУ представляется в виде соединения изменяемой и неизменяемой (располагаемой) частей:

$$W(s) = W_к(s)W_p(s),$$

где $W_к(s)$ – передаточная функция изменяемой части системы, $W_p(s)$ – передаточная функция располагаемой части системы.

Задачу синтеза закона управления можно сформулировать как определение такой передаточной функции $W_к(s)$, которая обеспечивает требуемые показатели качества системы, так как нельзя по заданным показателям качества построить годограф требуемой системы, но существует возможность задать положение доминирующих корней, обеспечивающих желаемые характеристики. По расположению доминирующих корней можно определить $W_к(s)$, и, в конечном итоге, полную передаточную функцию системы $W(s)$. Структура закона управления определяется только расположением его корней и не является жестко привязанной к известным типам регулирующих устройств, но, как правило, это фазоотстающие или фазоопережающие звенья с передаточной функцией вида:

$$W_k(s) = K\frac{(s^{\alpha}+N_1)}{(s^{\alpha}+P_1)},$$

где N_1, P_1, K – нуль, полюс и коэффициент усиления корректирующего звена.

Опишем основные этапы синтеза закона управления с опережением по фазе [7,8]:

1. Требуемые показатели качества задаются в виде времени переходного процесса T_p и перерегулирования σ. По этим показателям качества определяется положение доминирующих корней, которые должны в последующем обязательно располагаться на ветвях корневого годографа скорректированной системы. Для этого необходимо найти параметры ξ и ω, соответствующие доминирующим корням, из уравнений связи $\sigma(\xi^*, \alpha)$ и $t_p(\xi^{**}, \alpha)$.

Параметр ξ находится по формуле:

$$\sigma(\xi^*, \alpha) = a_{\alpha} e^{-b_{\alpha}\xi^*\pi} + c_{\alpha},$$

где $\xi^* = \xi/\sqrt{1-\xi^2}$, а коэффициенты $a_{\alpha}, b_{\alpha}, c_{\alpha}$ определяются из выражений:

$$a_{\alpha} = 0.0669\alpha^{-1.915} + 0.913\alpha^{3.887},$$

$$b_{\alpha} = \frac{0.305\alpha - 0.00925}{\alpha^3 - 1.545\alpha^2 + 0.765\alpha + 0.073},$$

$$c_{\alpha} = -0.115\alpha^{-1.916} + 0.1476.$$

Параметр ω определяется согласно зависимости:

$$t_p(\xi^{**}, \alpha) = \frac{k}{\omega^{\alpha}}\left[1 - \frac{t_1}{t_1 - t_2} e^{-\frac{\xi^{**}}{t_1}} + \frac{t_2}{t_1 - t_2} e^{-\frac{\xi^{**}}{t_2}}\right] + c_{\alpha}$$

где $\xi^{**} = -\xi/\sqrt{\cos^2(\alpha\pi/2) - \xi^2}$, а коэффициенты k, t_1, t_2, c_{α} находят из формул:

$$k = 41.77e^{-2.07\alpha} + 1.041 \cdot 10^{-8} e^{27.35\alpha},$$

$$c_{\alpha} = 4.905e^{-2.11\alpha^{5.146}} + 3.728e^{-4.486\alpha^{2.106}} - 4.505,$$

$$t_1 = \frac{3159}{\alpha^2 - 6780\alpha + 7360},$$

$$t_2 = 25.24\alpha^4 - 28.77\alpha^3 + 10.45\alpha^2 - 2.209\alpha + 0.584.$$

Из полученных соотношений находятся параметры ξ и ω, располагая которыми можно найти положение доминирующих полюсов $s_{1,2}^* = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$.

2. Строится корневой годограф нескорректированной системы на плоскости корней, где нанесено положение доминирующих корней.

3. Определяется положение корней фазоопережающего корректирующего устройства, реализующего синтезируемый закон управления, при этом расположение нуля выбирается таким образом, чтобы обеспечить требуемое смещение фазы, а, следовательно, и ветви годографа скорректированной системы влево от исходного положения нескорректированной системы и, в то же время, сохранить общее движение особых точек исходной системы.

4. Выбор положения полюса передаточной функции корректирующего устройства, реализующего синтезируемый закон управления осуществляется из уравнения фаз:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^o - \sum_{j=1}^{m} \theta_j = 180^o,$$

для чего доминирующий полюс соединяется со всеми нулями и полюсами располагаемой системы и нулем передаточной функции корректирующего элемента, тогда луч, проведенный из доминирующего полюса под углом наклона θ_j^k, найденным из уравнения фаз, пересечет ось абсцисс в точке, отвечающей положению этого полюса на комплексной плоскости корней.

5. Расчет коэффициента усиления на основании уравнения модулей. Коэффициент усиления рассчитывается из равенства:

$$K = \frac{l_1 l_2 \dots l_n}{l_1^o l_2^o \dots l_m^o},$$

где l_i и l_i^o - длины векторов, проведенных из полюсов и нулей соответственно в доминирующий полюс.

Для иллюстрации предлагаемого подхода осуществим синтез корректирующего устройства для неустойчивого объекта, описываемого передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{s^{0.6} - 3s^{0.3} + 1}.$$

Зададимся перерегулированием в 15%, что соответствует $\xi = -0.92$, а безразмерное время $T_p\omega^\alpha = 3$ или $T_p = 2.43$ с при $\omega = 2$ с$^{-1}$. Таким образом получаем расположение доминирующих полюсов

$s_{1,2}^{*} = -1.84 \pm 0.78j$ (рис. 3). Следуя описанной выше методике получаем передаточную функцию корректирующего устройства:

$$W_k(s) = 85.32\frac{4s^{0.3}+1}{0.0625s^{0.3}+1}.$$

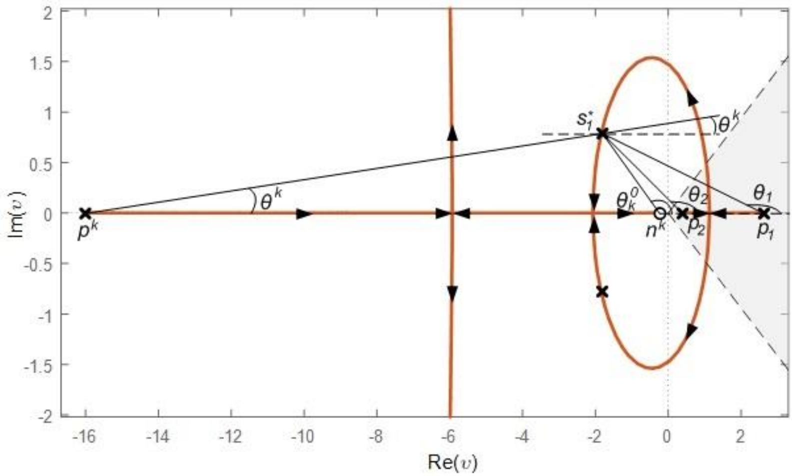

Рисунок 3 – Корневой годограф скорректированной системы

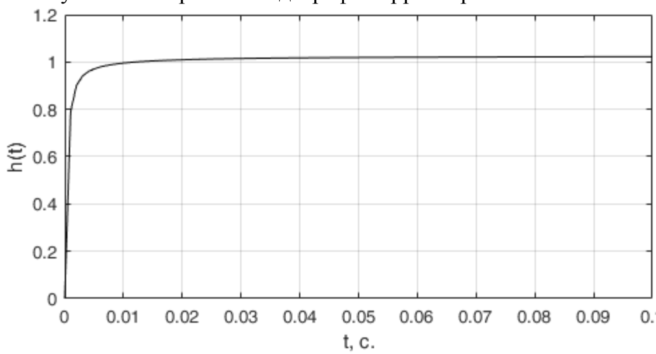

Рисунок 4 – Переходная характеристика скорректированной системы

Перерегулирование полученного процесса составляет 3.3%, что обусловлено погрешностями аппроксимации (рис. 4). Малое значение перерегулирования существенно уменьшило время переходного процесса. Таким образом, полученная система удовлетворяет заданным показателям качества.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Белгородской области в рамках проекта №14-41-08009/15 «р_офи_м», с использованием оборудования ЦВТ БГТУ им. В.Г. Шухова.

Список литературы:

1. Мишунин В.В., Рубанов В. Г. Системы автоматического управления и контроля с дробно-иррациональными передаточными функциями // Белгород: БГТУ им. В. Г. Шухова, 2004. 253 с.
2. Порхало В.А., Рубанов В.Г., Шаптала В.Г. Автоматизация печи обжига клинкера на основ каскадной и многосвязной систем управления // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2013. № 2. 2013. С. 69–72.
3. Concepcion A.M., Chen Y.Q., Vinagre B.M., Xue D., Feliu V.: Fractional Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications. Series: Advances in Industrial Control. Springer, Berlin (2010)
4. Рубанов В.Г., Мишунин В.В. О модификации критериев устойчивости для систем с передаточными функциями, содержащими дробную степень комплексного переменного // Современные проблемы строительного материаловедения: Материалы седьмых академических чтений РААСН. Ч. 2. Белгород. 2001. С. 263–267.
5. Merrikh-Bayat F., Afshar M., Karimi-Ghartemani M. “Extension of the root-locus method to a certain class of fractional-order systems,” ISA Transactions. 2009. Vol. 48. P. 48–53.
6. Machado J. A. T. “Root locus of fractional linear systems,” Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2011. vol. 16. P. 3855–3862.
7. Рубанов В. Г. Теория автоматического управления (математические модели, анализ и синтез линейных систем) : учеб. пособие для студ. вузов / В. Г. Рубанов ; БГТУ им. В. Г. Шухова Ч. I. 2-е изд., стер. – Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова. 2009. 199 с.
8. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М.: Наука, 1972. 448 с.