УЧЕТ УСЛОВИЙ СВЯЗИ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ КОЛЬЦА С ОПОРАМИ

pobvtas@yandex.ru

Полунин А.И., канд. техн. наук, проф.
Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

Аннотация. В статье рассматривается метод получения уравнений динамики вращающегося на опорах кольца и их решения, строго учитывающий условия нерастяжимости средней линии и условия связи на опорах. Решение получено с использованием обобщенных координат.

Ключевые слова: динамика вращающегося на опорах кольца с нерастяжимой средней линией, прецессия стоячих волн во вращающемся на опорах кольце, мобильная технология обработки крупногабаритных колец.

Вращающиеся на опорах кольца и оболочки широко используются в различных отраслях промышленности. Одной из проблем, возникающих при осуществлении проектных технологических работ с их использованием, ремонтно – восстановительных является проведение расчетов по динамике этих элементов, влияющей на качество технологических процессов.

Динамика колец и оболочек описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, решение которых представляет определенные трудности и они существенно увеличиваются при необходимости учитывать в уравнениях связи на координаты точек тела, возникающие вследствие наличия опор, необходимости учета нерастяжимости средней линии кольца либо срединной поверхности оболочки.

Наиболее эффективным методом решения таких задач является введение обобщенных координат, позволяющим свести сложную систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых существенно проще.

Такой подход применяется и при математическом моделировании динамики вращающихся на опорах колец. При необходимости учесть в уравнениях условие нерастяжимости средней линии используют линеаризованную зависимость между радиальным U и тангенциальным V перемещениями кольца

$$V' = -\int U(\theta)d\theta,$$

где θ – угловая координата точек кольца.

Эта формула позволяет выразить тангенциальное перемещение V через обобщенные координаты радиального перемещения U, задаваемые исследователем. В случае кольца ими являются коэффициенты ряда Фурье. Затем с использованием уравнения Лагранжа второго рода получают обыкновенные дифференциальные уравнения для обобщенных координат. Такой подход позволяет легко учесть уравнения связей между переменными и дает хорошую точность в задачах теории упругости.

Однако в нем содержится некоторая некорректность, заключающаяся в том, что при точном решении линеаризацию условия связи необходимо осуществлять после подстановки его в дифференциальное уравнение динамики кольца. Исследования по влиянию такой некорректности на точность получаемого решения динамики вращающегося кольца с опорами в имеющихся научных работах отсутствуют.

Рассмотрим применение более точного подхода для получения уравнений динамики вращающегося на опорах кольца с нерастяжимой средней линией. Для решения этой задачи используем уравнения динамики кольца для переменных U,V, записанных с использованием базисных функций

$$U = \sum_{i=1}^{N} a_{ui}\cos\big(i(\theta+\varphi_{uj})\big) + \sum_{i=1}^{N} b_{ui}\sin\big(i(\theta+\varphi_{uj})\big),$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} a_{vi}\cos\big(i(\theta+\varphi_{vj})\big) + \sum_{i=1}^{N} b_{vi}\sin\big(i(\theta+\varphi_{vj})\big).$$

Система уравнений зависит от обобщенных координат a_{ui}, b_{ui}, a_{vi}, b_{vi} (*i=1,2,…, N*), функций времени, и не зависят от угловой координаты θ. Она имеет вид

$$\begin{gathered}
\pi æ(\ddot{a}_{uj} + 2\dot{b}_{uj}j\dot{\varphi}_{uj} - a_{uj}j^2\dot{\varphi}_{uj}^2 + b_{uj}j\ddot{\varphi}_{uj} - \Omega\dot{a}_{vj}C_j^{vu} - \Omega\dot{b}_{vj}K_j^{vu} + \\
+\Omega a_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu} - \Omega b_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu}) - \pi æ\Omega(\dot{a}_{vj}C_j^{vu} + \dot{b}_{vj}K_j^{vu} - a_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu} + \\
+b_{Vj}j\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} + \Omega a_{uj}) + \pi\nu\big(-a_{vj}jK_j^{vu} + b_{vj}jC_j^{vu} + a_{uj}\big) + \pi\mu(-a_{vj}j^3K_j^{vu} + \\
+j^3b_{vj}C_j^{vu} + j^4a_{uj}) + \pi\mu K_T(-\dot{a}_{vj}j^3K_j^{vu} - a_{vj}j^4\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} + \dot{b}_{vj}j^3C_j^{vu} - \\
-b_{vj}j^4\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu} + j^4\dot{a}_{uj} + b_{uj}j^5\dot{\varphi}_{uj}) + \pi\nu K_T(-\dot{a}_{vj}jK_j^{vu} - a_{vj}j^2\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} + \\
+\dot{b}_{vj}jC_j^{vu} - b_{vj}j^2\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu} + \dot{a}_{uj} + b_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}) = \\
= -P_R\, cos\left(j\big(\theta_R + \Omega t + \varphi_{uj}\big)\right) + \frac{\partial F_{u1}}{\partial a_{uj}}\lambda_1 + \frac{\partial F_{u2}}{\partial a_{uj}}\lambda_2, \qquad (1)
\end{gathered}$$

$$\pi æ(\ddot{b}_{uj} - 2\dot{a}_{uj}j\dot{\varphi}_{uj} - b_{uj}j^2\dot{\varphi}^2{}_{uj} - a_{uj}j\ddot{\varphi}_{uj} - \Omega\dot{a}_{vj}K_j^{vu} - \Omega\dot{b}_{vj}C_j^{vu} +$$
$$+\Omega a_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} - \Omega b_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu}) - \pi æ\Omega(\dot{a}_{vj}K_j^{vu} + \dot{b}_{vj}C_j^{vu} - a_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} +$$
$$+b_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu} + \Omega b_{uj}) + \pi\nu\left(-a_{vj}jC_j^{vu} + b_{vj}jK_j^{vu} + b_{uj}\right) + \pi\mu(-a_{vj}j^3C_j^{vu} +$$
$$+j^3b_{vj}K_j^{vu} + j^4b_{uj}) + \pi\mu K_T(-\dot{a}_{vj}j^3C_j^{vu} - a_{vj}j^4\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu} + \dot{b}_{vj}j^3K_j^{vu} -$$
$$-b_{vj}j^4\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} + j^4\dot{b}_{uj} - a_{uj}j^5\dot{\varphi}_{uj}) + \pi\nu K_T(-\dot{a}_{vj}jC_j^{vu} - a_{vj}j^2\dot{\varphi}_{vj}K_j^{vu} +$$
$$+\dot{b}_{vj}jK_j^{vu} - b_{vj}j^2\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} + \dot{b}_{uj} - a_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}) =$$
$$= -P_R\sin\left(j\left(\theta_R + \Omega t + \varphi_{uj}\right)\right) + \frac{\partial F_{u1}}{\partial b_{uj}}\lambda_1 + \frac{\partial F_{u2}}{\partial b_{uj}}\lambda_2, \qquad (2)$$

$$\pi æ(\ddot{a}_{vj} + \dot{b}_{vj}j\dot{\varphi}_{vj} - a_{vj}j^2\dot{\varphi}^2{}_{vj} + \dot{b}_{vj}j\dot{\varphi}_{vj} + b_{vj}j\ddot{\varphi}_{vj} + \Omega\dot{a}_{uj}C_j^{uv} + \Omega\dot{b}_{uj}K_j^{uv}$$
$$-$$
$$-\Omega a_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv} + \Omega b_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}C_j^{uv}) + \pi æ\Omega(\dot{a}_{uj}C_j^{uv} + \dot{b}_{uj}K_j^{uv} - a_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv} +$$
$$+b_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}C_j^{uv} - \Omega a_{vj}) + \pi\mu\left(-a_{uj}j^3K_j^{uv} - b_{uj}j^3C_j^{uv} + a_{vj}j^2\right)$$
$$+ \pi\nu(-a_{uj}jK_j^{uv} -$$
$$-jb_{uj}C_j^{uv} + a_{vj}j^2) + \pi\mu K_T(\dot{a}_{vj}j^2 + b_{vj}j^3\dot{\varphi}_{vj} - \dot{a}_{uj}j^3K_j^{UV} + a_{uj}j^4\dot{\varphi}_{uj}C_j^{uv} -$$
$$-\dot{b}_{uj}j^3C_j^{uv} - b_{uj}j^4\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv}) + \pi\nu K_T(\dot{a}_{vj}j^2 + b_{vj}j^3\dot{\varphi}_{vj} - \dot{a}_{uj}jK_j^{uv} +$$
$$+a_{uj}j^2\dot{\varphi}_{vj}C_j^{uv} - \dot{b}_{uj}jC_j^{uv} - b_{uj}j^2\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv}) =$$
$$= -P_R\cos\left(j\left(\theta_R + \Omega t + \varphi_{vj}\right)\right), \qquad (3)$$

$$\pi æ(\ddot{b}_{vj} - \dot{a}_{vj}j\dot{\varphi}_{vj} - \dot{a}_{vj}j\dot{\varphi}_{vj} - a_{vj}j\ddot{\varphi}_{vj} - b_{vj}j^2\dot{\varphi}_{vj}^2 + \Omega\dot{a}_{uj}K_j^{uv} + \Omega\dot{b}_{uj}C_j^{uv} -$$
$$-\Omega a_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}C_j^{uv} + \Omega b_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv}) + \pi æ\Omega(\dot{a}_{uj}K_j^{uv} + \dot{b}_{uj}C_j^{uv} - a_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}C_j^{uv} +$$
$$+b_{uj}j\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv} - \Omega b_{vj}) + \pi\mu\left(j^3a_{uj}C_j^{uv} + j^3b_{uj}K_j^{uv} + b_{vj}j^2\right) + \pi\nu(a_{uj}jC_j^{uv} +$$
$$+b_{uj}K_j^{uv} + b_{vj}j^2) + \pi\mu K_T(\dot{b}_{vj}j^2 - a_{vj}j^3\dot{\varphi}_{vj} + \dot{a}_{uj}j^3C_j^{uv} - a_{uj}j^4\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv} +$$
$$+\dot{b}_{uj}j^3K_j^{uv} + b_{uj}j^4\dot{\varphi}_{uj}C_j^{uv}) + \pi\nu K_T(\dot{b}_{vj}j^2 - a_{vj}j^3\dot{\varphi}_{vj} + \dot{a}_{uj}jC_j^{uv} -$$
$$-a_{uj}j^2\dot{\varphi}_{uj}K_j^{uv} + \dot{b}_{uj}jK_j^{uv} + b_{uj}j^2\dot{\varphi}_{uj}C_j^{uv}) =$$
$$= -P_R\sin\left(j\left(\theta_R + \Omega t + \varphi_{vj}\right)\right). \qquad (4)$$

Полное условие связи между U и V имеет вид

$$2r_0(V' + U) + (V' + U)^2 + (V - U')^2 = 0. \qquad (5)$$

При подстановке в это уравнение выражений для U,V и их производных получим функцию, зависящую от обобщенных координат и угла θ. Для исключения из нее угла θ используем следующий прием. Выражение (5) тождественно равно нулю на фазовых траекториях кольца при любых значениях обобщенных координат и угле θ. Поэтому на этих траекториях равны нулю и выражения

$$\int_0^{2\pi} [2r_0(V' + U) + (V' + U)^2 + (V - U')^2] \cos(i\theta)\, d\theta = 0, \qquad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} [2r_0(V' + U) + (V' + U)^2 + (V - U')^2] \sin(i\theta)\, d\theta = 0, \qquad (7)$$

(i=1,2,…,N).

Эти зависимости содержат обобщенные координаты и в них отсутствует угол *θ.* Таким образом, вместо одного уравнения связи получили *2N* условий связи. Обозначим их левые части соответственно векторами S_C, S_S , а уравнения $S_{Ci} = 0,\ S_{SI} = 0$, (*i=1,2,…,N*).

Докажем, что получаемая система уравнений связи (6), (7), используемая в дифференциальных уравнениях динамики кольца с обобщенными координатами, эквивалентна исходной системе в частных производных.

Доказательство.

Обозначим исходное уравнение связи (5)

S(U(t),V(t),U'(t),V'(t))=0.

Равенство выполняется на всех траекториях *U(t), V(t).* При замене этих переменных обобщенными координатами получим

$$S(a_u(t), b_u(t), a_v(t), b_v(t), \theta\ ) = 0, \qquad (8)$$

где $a_u(t), b_u(t), a_v(t), b_v(t)$ – вектора введенных обобщенных координат.

На всех траекториях $a_u(t), b_u(t), a_v(t), b_v(t)$ -решениях динамики кольца равенство (8) должно выполняться для любого *t* и θ.

Допустим, на каком-то интервале θ равенство (8) не выполняется, т.е. не равно нулю. Тогда эту функцию, как периодическую на интервале 0 - 2π, .можно разложить в ряд Фурье, используя систему ортогональных функций *sin(iθ), cos(iθ) (i=1,2,…,N).* Коэффициенты этого разложения равны

$$a_{si} = \int_0^{2\pi} S\cos(i\theta)\, d\theta, \qquad b_{si} = \int_0^{2\pi} S\, sin(i\theta)\, d\theta, \qquad (9)$$

и, какие – то из них, не должны быть равны нулю. Но выражения (9) совпадают с (6), (7), из равенства нулю которых находим решение уравнений динамики кольца с опорами в обобщенных координатах. Отсюда следует, что новые условия связи (6), (7) правильно учитывают нерастяжимость средней линии при использовании обобщенных координат для описания динамики вращающегося на опорах кольца.

Уравнения связи, обусловленные наличием опор, обозначим $F_{U1} = 0$, $F_{U2} = 0$, где

$$F_{U1} = \sum_{i=1}^{N}[a_{ui}\cos(\,i(\pi-\alpha)) + b_{ui}\sin(i(\pi-\alpha))], = 0 \qquad (10)$$

$$F_{U1} = \sum_{i=1}^{N}[a_{ui}\cos(\,i(\pi+\alpha)) + b_{ui}\sin(i(\pi+\alpha))] = 0. \qquad (11)$$

Они не зависят от угла θ.

Используя (1) – (4) систему уравнений динамики кольца в общем виде можно записать

$$A_2\,\ddot{W} + A_1\,\dot{W} + A_0\,\mathrm{W} = M_H\lambda_H + M_0\lambda_0 + Q. \qquad (12)$$

Здесь $W^T = [\,a_{u1} \dots a_{uN} \;\; b_{u1} \dots b_{uN} \;\; a_{v1} \dots a_{vN} \;\; b_{v1} \dots b_{vN}\,]$,

A_1, A_2, A_3 – матрицы размера $4N\times 4N$, получаемые из (1) - (4);

M_H – матрица размера $4N\times 2N$ частных производных условий связи вследствие нерастяжимости средней линии S_{Ci}, S_{Si} по вектору W;

M_0 – матрица $4N\times 2$ частных производных условий связи, обусловленных наличием опор, по вектору W;

$\lambda_{\mathrm{H}}, \lambda_0$ – неопределенные множители Лагранжа; Q – вектор внешних сил.

Матрица M_H имеет вид

$\mathrm{M}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} = [\mathrm{M}_{\mathrm{H}1} \;\; \mathrm{M}_{\mathrm{H}2} \; \mathrm{M}_{\mathrm{H}3} \; \mathrm{M}_{\mathrm{H}4}]^{\mathrm{T}}$,

$$\mathrm{M}_{\mathrm{H}1} = \begin{bmatrix}\frac{\partial S_C}{\partial a_{Ui}} & \frac{\partial S_S}{\partial a_{Ui}}\end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}_{\mathrm{H}2} = \begin{bmatrix}\frac{\partial S_C}{\partial b_{Ui}} & \frac{\partial S_S}{\partial b_{Ui}}\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{M}_{\mathrm{H}3} = \begin{bmatrix}\frac{\partial S_C}{\partial a_{Vi}} & \frac{\partial S_S}{\partial a_{Vi}}\end{bmatrix}, \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{H}4} = \begin{bmatrix}\frac{\partial S_C}{\partial b_{Vi}} & \frac{\partial S_S}{\partial b_{Vi}}\end{bmatrix}.$$

Матрица M_0 имеет вид $\mathrm{M}_0^{\mathrm{T}} = [\mathrm{M}_{01} \;\; \mathrm{M}_{02}\,]^{\mathrm{T}}$.

Элементы матрицы M_{01} размера $2N\times 2$ равны выражениям

cos(i(π-α)) cos(i(π+α)) (i = 1,2,…,N), sin(i(π-α)) sin(i(π+α)) (i = 1,2,…,N).

Матрица M_{02} размера $2N\times 2$ нулевая.

Найдем зависимости для элементов матрицы M_H. Выражения (6), (7), от которых надо вычислить производные, представляют интегралы, которые нельзя вычислить аналитически. Поэтому линеаризуем их, а потом вычислим интеграл. Разложение в ряд Тейлора осуществим в окрестности $V=0$, $U=0$, что соответствует нулевым значениям обобщенных координат. Окончательно для производных получим

$$\frac{\partial S_{ci}}{\partial a_{Uj}} = \int_0^{2\pi} 2r_0\cos(j(\theta+\varphi_{Uj}))\cos(i\theta)\,d\theta = \begin{cases} 2\pi r_0\cos(i\varphi_{Ui}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial S_{ci}}{\partial b_{Uj}} = \int_0^{2\pi} 2r_0\sin(j(\theta+\varphi_{Uj}))\cos(i\theta)\,d\theta = \begin{cases} 2\pi r_0\sin(i\varphi_{Ui}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial S_{ci}}{\partial a_{Vj}} = -\int_0^{2\pi} 2r_0\mathrm{j}\sin(j(\theta+\varphi_{Vj}))\cos(i\theta)\,d\theta =$$

$$= \begin{cases} -2\pi r_0 i\sin(i\varphi_{vi}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial S_{ci}}{\partial b_{vj}} = \int_0^{2\pi} 2r_0\mathrm{j}\cos(j(\theta+\varphi_{Vj}))\cos(i\theta)\,d\theta = \begin{cases} 2\pi r_0 i\cos(i\varphi_{Vi}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial S_{Si}}{\partial a_{Uj}} = \int_0^{2\pi} 2r_0\cos(j(\theta+\varphi_{Uj}))\sin(i\theta)\,d\theta = \begin{cases} -2\pi r_0\sin(i\varphi_{Ui}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial S_{Si}}{\partial b_{Uj}} = \int_0^{2\pi} 2r_0\sin(j(\theta+\varphi_{Uj}))\sin(i\theta)\,d\theta = \begin{cases} 2\pi r_0\cos(i\varphi_{Ui}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial S_{Si}}{\partial a_{Vj}} = -\int_0^{2\pi} 2r_0\mathrm{j}\sin(j(\theta+\varphi_{Vj}))\sin(i\theta)\,d\theta =$$

$$= \begin{cases} -2\pi r_0 i\cos(i\varphi_{Vi}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases}$$

$$\frac{\partial S_{Si}}{\partial b_{Vj}} = \int_0^{2\pi} 2r_0\mathrm{j}\cos(j(\theta+\varphi_{Vj}))\sin(i\theta)\,d\theta == \begin{cases} -2\pi r_0 i\sin(i\varphi_{Vi}) & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases}$$

Преобразуем систему (12), вводя один общий вектор

$$\lambda^T = [\lambda_{H1}\ \ \lambda_{H2} \ldots \lambda_{H2N}\ \ \lambda_{01}\ \ \lambda_{02}].$$

Тогда система (12) примет вид

$A_2\,\ddot{W}$ + $A_1\,\dot{W}$ + A_0 W = $M_\lambda\lambda + Q$. (13)

Здесь матрица $\mathrm{M}_\lambda = [\mathrm{M}_\mathrm{H}\ \ \mathrm{M}_0]$ размером 4N × (2N+2).

Получить формулы для элементов системы уравнений (13) в аналитическом виде проблематично, поэтому используем матричные преобразования. Необходимо исключить из системы вектор λ размера 2N + 2. Для этого представим матрицы системы (13) в виде двух матриц

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix},\ \ A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix},\ \ A_0 = \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{02} \end{bmatrix},\ \ M_\lambda = \begin{bmatrix} M_{\lambda 1} \\ M_{\lambda 2} \end{bmatrix},\quad \mathrm{Q}= \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

Размеры матриц $A_{21}, A_{11},\ A_{01}$ (2N+2)× $4N,\ A_{22}, A_{12},\ A_{02}$ (2N-2) × $4N$,

$M_{\lambda 1}$ (2N+2) × $(2N + 2),\ M_{\lambda 2}$ (2N-2) × $(2N + 2)$.

Используя их, получим две системы

$A_{21}\,\ddot{W}$ + $A_{11}\,\dot{W}$ + A_{01} W = $M_{\lambda 1}\lambda + Q_1$. (14)

$A_{22}\,\ddot{W}$ + $A_{12}\,\dot{W}$ + A_{02} W = $M_{\lambda 2}\lambda + Q_2$. (15)

Матрица $M_{\lambda 1}$квадратная, поэтому имеем

$\lambda = M_{\lambda 1}^{-1}A_{21}\ddot{W} + M_{\lambda 1}^{-1}A_{11}\dot{W} + M_{\lambda 1}^{-1}A_{01}W - M_{\lambda 1}^{-1}Q_1$. (16)

Обозначим $B_2 = M_{\lambda 1}^{-1}A_{21},\ B_1 = M_{\lambda 1}^{-1}A_{11},\ B_0 = M_{\lambda 1}^{-1}A_{01},\ B_Q = M_{\lambda 1}^{-1}Q_1$.

Выражение (16) примет вид

$\lambda = B_2\ddot{W} + B_1\dot{W} + B_0W$ - B_Q.

Подставим зависимость для λ в (15). Получим

$(A_{22} - M_{\lambda 2}B_2)\ddot{W}$ + $(A_{12} - M_{\lambda 2}B_1)\dot{W}$ + $(A_{02} - M_{\lambda 2}B_0)$W $=Q_2 - -M_{\lambda 2}B_Q$. (17)

Обозначим $D_2 = A_{22} - M_{\lambda 2}B_2,\quad D_1 = A_{12} - M_{\lambda 2}B_1,\quad D_0 = A_{02} - M_{\lambda 2}B_0$,

$F = Q_2 - M_{\lambda 2}B_Q$.

Тогда система (17) примет вид

$D_2\,\ddot{W}$ + $D_1\,\dot{W}$ + D_0 W = F. (18)

Размер матриц $D_2,\ \ D_{1,}\ D_0$ (2N-2)×4N. Решается система (18) с условиями связи (6), (7), (10), (11).

Уравнения связи (6), (7) являются нелинейными и использовать их в таком виде проблематично. Поэтому линеаризуем их в окрестности нулевых значений координат, как и при выводе формул производных от них. Получим

$S_{Ci} = 2\pi r_0 \{-i\sin(i\varphi_{Vi})\,a_{Vi} + i\cos(i\varphi_{Vi})\,b_{Vi} + \cos(i\varphi_{Ui})\,a_{ui} + \sin(i\varphi_{Ui})\,b_{Ui}\}$,

$S_{Si} = 2\pi r_0 \{-i\cos(i\varphi_{Vi})\, a_{Vi} - i\, sin(i\varphi_{Vi})\, b_{Vi} - sin(i\varphi_{Ui})\, a_{ui} + cos(i\varphi_{Ui})\, b_{Ui}\}$.

Из этих уравнений получим условия связи, обусловленные нерастяжимостью средней линией, в которых фигурируют только обобщенные координаты

$-isin(i\varphi_{Vi})\, a_{Vi} + i\, cos(i\varphi_{Vi})\, b_{Vi} + cos(i\varphi_{Ui})\, a_{ui} + sin(i\varphi_{Ui})\, b_{Ui} = 0,$

$-i\cos(i\varphi_{Vi})\, a_{Vi} - i\, sin(i\varphi_{Vi})\, b_{Vi} - sin(i\varphi_{Ui})\, a_{ui} + cos(i\varphi_{Ui})\, b_{Ui} = 0.$

Решение данной системы уравнений относительно неизвестных a_{Vi}, b_{Vi} дает

$a_{Vi} = i^{-1}\, b_{Ui} \qquad b_{Vi} = -i^{-1}\, a_{Ui}$. (19)

Для вектора обобщенных координат системы (18) получим

$W^T = [\, a_{u1} \dots a_{UN} \;\; b_{u1} \dots b_{UN} \;\; b_{U1} \dots i^{-1} b_{Ui} \dots N^{-1} b_{UN} - a_{U1} \dots - i^{-1} a_{Ui} - N^{-1} a_{UN}],$

Обозначим

$W_a^T = [\, a_{u1} a_{u2} \dots a_{UN}\,],\; W_b^T = [\, b_{u1} b_{u2} \dots b_{UN}\,].$

Тогда

$[a_{V1} a_{V2} \dots a_{VN}\,]^T = M_{aV}\, W_b,$ где $M_{aV} = \begin{bmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 \\ 0 & & N^{-1} \end{bmatrix}$ – диагональная матрица размера N$\times N$.

$[b_{V1} b_{V2} \dots b_{VN}\,]^T = M_{bV}\, W_a,$ где $M_{bV} = \begin{bmatrix} -1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -i^{-1} & 0 \\ 0 & & -N^{-1} \end{bmatrix}$ – диагональная матрица размера N$\times N$.

Тогда

$$W^T = \; [W_a\, W_b \;\; M_{aV} W_b \;\;\; M_{bV} W_a]^{\,T} \qquad (20)$$

Представим матрицы D_2, D_1, D_0 в виде

$D_2 = [D_{21}\;\; D_{22}\;\; D_{23}\;\; D_{24}\,],\qquad D_1 = [D_{11}\;\; D_{12}\;\; D_{13}\;\; D_{14}\,],\qquad D_0 = [D_{01}\;\; D_{02}\;\; D_{03}\;\; D_{04}\,]$. Число строк в подматрицах *2N-2*, столбцов *N*.

Подставляя эти матрицы и (20) в (18), приводя подобные члены получим

$T_{2a}\, \ddot{W}_a + T_{2b} \ddot{W}_b + T_{1a}\, \dot{W}_a + T_{1b}\, \dot{W}_b + T_{0a} W_a + T_{0b} W_b = \mathrm{F}.$ (21)

Здесь $T_{2a} = D_{21} + D_{24} M_{bV}$, $T_{2b} = D_{22} + D_{23} M_{aV}$, $T_{1a} = D_{11} + D_{14} M_{bV}$

$T_{1b} = D_{12} + D_{13} M_{aV}$, $T_{0a} = D_{01} + D_{04} M_{bV}$ $T_{0b} = D_{02} + D_{03} M_{aV}$.

Размер этих матриц *T* равен *(2N-2)*$\times N$.

В системе (21) исключен вектор неопределенных множителей λ. Учтем в ней условия связи (10), (11) в точках опор. Из них выразим a_{UN}, b_{UN}. Получим $a_{uN} = w_1 p,\ \ b_{uN} = w_2 p.$

где w_1, w_2 – соответственно первая и вторая строки произведения матриц R и M, где

$$R = \begin{bmatrix} cos\big(N(\pi-\alpha)\big) & sin\big(N(\pi-\alpha)\big) \\ cos\big(N(\pi+\alpha)\big) & sin\big(N(\pi+\alpha)\big) \end{bmatrix}^{-1},$$

$$M = \begin{bmatrix} -cos\big(j(\pi-\alpha)\big),\ (j=1,2,\dots,N-1) & -sin\big(j(\pi-\alpha)\big),\ (j=1,2,\dots,N-1) \\ -cos\big(j(\pi+\alpha)\big),\ (j=1,2,\dots,N-1) & -sin\big(j(\pi+\alpha)\big),\ (j=1,2,\dots,N-1) \end{bmatrix},$$

$$p^T = [a_{u1} a_{u2} \dots a_{u,N-1} \quad b_{u1} b_{u2} \dots b_{u,N-1}].$$

Обозначим $P_a^T = [a_{u1}\ a_{u2}\ \dots\ a_{u,N-1}],\quad P_b^T = [b_{u1}\ b_{u2}\ \dots\ b_{u,N-1}].$

Тогда $P^T = [\ P_a^T\ \ P_b^T\ ],\quad W_a^T = [\ P_a^T\ \ W_1 P\ ],\quad W_b^T = [\ P_b^T\ \ W_2 P\ ]$

Вектор W можно записать

$$W^T = [P_a \quad w_1 P \quad P_b \quad w_2 P]^T.$$

Запишем систему дифференциальных уравнений относительно переменных P_a, P_b. Для этого представим вектора – строки w_1, w_2 в виде

$$w_1 = [w_{11} \quad w_{12}],\quad w_2 = [w_{21} \quad w_{22}].$$

Размер векторов w_{ij} $(i, j = 1{,}2)$ равен $N-1$. Тогда

$W_a^T = \big[\ P_a \quad W_{11}P_a + W_{12}P_b\ \big]^T,\quad W_b^T = \big[\ P_b \quad W_{21}P_a + W_{22}P_b\ \big].^T$

Представим каждую матрицу $T_{2a}, T_{2b}, T_{1a}, T_{1b}\ T_{0a}, T_{0b}$ в виде двух подматриц

$T_{2a} = [T_{2a1} \quad T_{2a2}],\quad T_{2b} = [T_{2b1} \quad T_{2b2}],\quad T_{1a} = [T_{1a1} \quad T_{1a2}],$
$T_{1b} = [T_{1b1} \quad T_{1b2}],\quad T_{0a} = [T_{0a1} \quad T_{0a2}],\quad T_{0b} = [T_{0b1} \quad T_{0b2}].$

Первые подматрицы размера *(2N-2)* $\times (N-1)$, вторые $(2N-2) \times 1$.

Систему уравнений (21) можно записать

$$[T_{2a1}\ T_{2a2}] \begin{bmatrix} \ddot{P}_a \\ w_{11}\ddot{P}_a + w_{12}\ddot{P}_b \end{bmatrix} + [T_{2b1}\ T_{2b2}] \begin{bmatrix} \ddot{P}_b \\ w_{21}\ddot{P}_a + w_{22}\ddot{P}_b \end{bmatrix} +$$

$$+\ [T_{1a1}\ T_{1a2}] \begin{bmatrix} \dot{P}_a \\ w_{11}\dot{P}_a + w_{12}\dot{P}_b \end{bmatrix} + [T_{1b1}\ T_{1b2}] \begin{bmatrix} \dot{P}_b \\ w_{21}\dot{P}_a + w_{22}\dot{P}_b \end{bmatrix} +$$

$$+\ [T_{0a1}\ T_{0a2}] \begin{bmatrix} P_a \\ w_{11}P_a + w_{12}P_b \end{bmatrix} + [T_{0b1}\ T_{0b2}] \begin{bmatrix} P_b \\ w_{21}P_a + w_{22}P_b \end{bmatrix} = F.$$

Перемножая и группируя слагаемые получим систему уравнений

$$E_2\ddot{P} + E_1\dot{P} + E_0 P = F,$$

где

$E_2 = [(T_{2a1} + T_{2a2}w_{11} + T_{2b2}\, w_{21})\ \ (T_{2a2}w_{12} + T_{2b1} + T_{2b2}\, w_{22})\,],$

$$E_1 = [(T_{1a1} + T_{1a2}w_{11} + T_{1b2}\, w_{21})\ (T_{1a2}w_{12} + T_{1b1} + T_{1b2}\, w_{22})\,],$$

$$E_0 = [(T_{0a1} + T_{0a2}w_{11} + T_{0b2}\, w_{21})\ (T_{0a2}w_{12} + T_{0b1} + T_{0b2}\, w_{22})\,].$$

Эта система описывает динамику вращающегося на опорах кольца с нерастяжимой средней линией, в которой линеаризация условий связи осуществляется после подстановки их в дифференциальные уравнения поведения кольца.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Белгородской области в рамках проекта №14-41-08018 «р_офи_м».